Problème 1 Soit l'équation différentielle

$$4x^3y + y' - xy'' = 0 \quad (E)$$

1°| Supposons $f(x)$ solution de (E), montrons que $f(-x)$ est aussi solution de (E).

$(f(-x))' = -f'(-x)$, $(f(-x))'' = f''(-x)$ qu'on injecte dans (E)

pour obtenir $4x^3(f(-x)) - f'(-x) - xf''(-x)$

$$= -\left[4(-x)^3 f(-x) + f'(-x) - (-x)f''(-x)\right] = 0$$

Donc si $y = f(x)$ est solution de (E) alors $y = f(-x)$ est aussi solution de (E)

2°| a| Vérifions que $x \mapsto \operatorname{ch} x^2$ est solution de (E)

$y = \operatorname{ch} x^2 \Rightarrow y' = 2x \operatorname{sh} x^2$ et $y'' = 2\operatorname{sh}x^2 + 4x^2 \operatorname{ch} x^2$.

Ainsi $4x^3(\operatorname{ch}x^2) + 2x\operatorname{sh}x^2 - x\left[2\operatorname{sh}x^2 + 4x^2\operatorname{ch}x^2\right] = 0$.

On effectue maintenant un changement de fonctions en posant $y = z \cdot \operatorname{ch}x^2$.

$y' = z'\operatorname{ch}x^2 + 2x\operatorname{sh}x^2 \cdot z$

$y'' = z''\operatorname{ch}x^2 + 4x\operatorname{sh}x^2 \cdot z' + z\left[2\operatorname{sh}x^2 + 4x^2\operatorname{ch}x^2\right]$

y solution de $(E) \Rightarrow$

$4x^3 \cdot z\operatorname{ch}x^2 + z'\operatorname{ch}x^2 + 2x\operatorname{sh}x^2 \cdot z$

$-x\operatorname{ch}x^2 z'' - 4x^2\operatorname{sh}x^2 \cdot z' - 2x\operatorname{sh}x^2 z - 4x^3\operatorname{ch}x^2 \cdot z = 0$

$$-x\operatorname{ch}x^2 \cdot z'' + \left(-4x^2\operatorname{sh}x^2 + \operatorname{ch}x^2\right)z' = 0$$

$$\frac{z''}{z'} = \frac{-4x\operatorname{sh}x^2}{\operatorname{ch}x^2} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{Cx}{\operatorname{ch}^2 x^2} \Rightarrow z = C_1 \operatorname{th} x^2$$

Ainsi $y = C_1 \cdot \operatorname{th}x^2 \cdot \operatorname{ch}x^2 = C_1 \operatorname{sh}x^2$

Une solution générale sera de la forme.

$$y(x) = K_0 \operatorname{Ch} x^2 + K_1 \operatorname{Sh} x^2.$$

b/ Changement de variable $t = x^2$, $t \neq 0$.

Pour les $x > 0$, on a $x = \sqrt{t}$.

$y(x)$ solution de (E) $y(x) = y(\sqrt{t}) = f(t)$

$$f'(t) = \frac{d}{dt}(y(x)) = \frac{d}{dx}y(x) \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \boxed{2f'(t)\sqrt{t} = y'}$$

$$f''(t) = \frac{d^2}{dt^2}(y(x)) = \frac{d}{dt}\left[y'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\right] = \frac{d}{dt}[y'(x)] \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + y'(x) \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$$

$$f''(t) = y''(x) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + y'(x) \times -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^{3/2}}$$

$$= y''(x) \times \frac{1}{4t} - \frac{1}{2t} f'(t)$$

$$\Rightarrow 4t f''(t) + 2f'(t) = y''(x)$$

On injecte les éléments dans (E) pour obtenir :

$$f''(t) - f(t) = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est $r^2 - 1 = 0$
$\Rightarrow r = \pm 1$.

$$f(t) = Ae^{t} + Be^{-t} = A' \operatorname{ch} t + B' \operatorname{Sh} t$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A' \operatorname{Ch} x^2 + B' \operatorname{Sh} x^2}.$$

c/ Soit λ un nombre positif quelconque (E^*)

$$4\lambda x^3 y + y' - x y'' = 0$$

On considère le changement de variable $\tau = \lambda^{1/4} x$

$$y(x) = y\left(\frac{\tau}{\lambda^{1/4}}\right) = f(\tau) \qquad x = \frac{\tau}{\lambda^{1/4}}$$

$$f'(\tau) = y'\left(\frac{\tau}{\lambda^{1/4}}\right) \times \frac{1}{\lambda^{1/4}}$$

$$f''(\tau) = y''\left(\frac{\tau}{\lambda^{1/4}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda^{1/2}}$$ Données qu'on injecte

dans (E^*) pour obtenir

$$-\frac{\tau}{\lambda^{1/4}} \times \lambda^{1/2} f''(\tau) + \lambda^{1/4} f'(\tau) + 4\lambda \left(\frac{\tau}{\lambda^{1/4}}\right)^3 f(\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\tau f''(\tau) + f'(\tau) + 4\tau^3 f(\tau) = 0$$

On s'est ramené à (E), alors

$$y(x) = f(\tau) = A \operatorname{Ch}\tau^2 + B \operatorname{sh}\tau^2, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

$$\tau = \lambda^{1/4} x \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = A \operatorname{Ch}(\sqrt{\lambda}\, x^2) + B \operatorname{Sh}(\sqrt{\lambda}\, x^2), \quad A, B \in \mathbb{R}}$$

<u>Problème 2</u> On pose (1) $\begin{cases} x = \operatorname{sh} u \iff u = \operatorname{Argsh} x. \\ z(u) = y(x) \operatorname{Ch} u. \end{cases}$

1°/ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{z(u)}{\operatorname{Ch} u}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{z(u)}{\operatorname{Ch} u}\right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left[\frac{z'(u) \cdot \operatorname{ch} u - z(u) \operatorname{sh} u}{\operatorname{Ch}^2 u}\right] \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \left(\frac{1}{\operatorname{Ch} u}\right)$$

$$= \frac{z'(u) - z(u) \operatorname{th} u}{\operatorname{Ch}^2 u}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\left[\frac{z'(u) - z(u) \operatorname{th} u}{\operatorname{Ch}^2 u}\right] \cdot \frac{1}{\operatorname{Ch} u}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Ch}^5 u}\left[\left[z''(u) - z'(u) \operatorname{th} u - z(u) \cdot \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 u}\right] \operatorname{Ch}^2 u - \left[z'(u) - z(u) \operatorname{th} u\right] \cdot 2 \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u\right]$$

$$= \frac{z''(u)}{\operatorname{Ch}^3 u} - \frac{3 z'(u) \operatorname{th} u}{\operatorname{Ch}^3 u} + \frac{z(u)\left[3 \operatorname{th}^2 u - 1\right]}{\operatorname{Ch}^3 u}$$

L'injection de ces informations dans (E) donne

$$\frac{Z''(u)}{Ch^{3} u} + \left[-\frac{3 th u}{Ch u} + \frac{3 Sh u}{Ch^2 u} \right] Z'(u)$$

$$+ \left[\frac{3 th^2 u - 1}{Ch u} - \frac{3 sh u\, th u}{Ch^2 u} + \frac{1 - n^2}{Ch u} \right] Z(u) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Z''(u)}{Ch u} - \frac{n^2}{Ch u} \cdot Z(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Z''(u) - n^2 Z(u) \qquad (E')$$

L'équation caractéristique associée à (E')

est $r^2 - n^2 = 0 \qquad r_{\pm} = \pm n.$

Ainsi $Z(u) = A e^{nu} + B e^{-nu}$, $A, B \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{Z(u)}{Ch u} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[A e^{n \operatorname{Argsh} x} + B e^{-n \operatorname{Argsh} x} \right]$$

$\operatorname{Argsh} x = \ln |x + \sqrt{1+x^2}|$, $\begin{cases} e^{nu} = |x + \sqrt{1+x^2}|^n \\ e^{-nu} = |\sqrt{1+x^2} - x|^n \end{cases}$

Ainsi $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[A |x + \sqrt{1+x^2}|^n + B |\sqrt{1+x^2} - x|^n \right]$

Cherchons la solution $y(x)$ t.q. $y(0) = 1$ et $y(+\infty) = 0$

$y(0) = 1 = A + B$

En $+\infty$ $\quad y(x) \underset{+\infty}{\sim} 2A x^{n-1} \qquad \underline{n > 1}$.

pour que $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

$\Rightarrow B = 1$ et par suite

$$y(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)^n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Problème 3

1°/ Soit l'équation différentielle

$$(1-x^2)\,y''(x) - x\,y'(x) + 4y(x) = 0, \quad (|x|<1) \quad (1)$$

On pose $t = \mathrm{Arccos}\,x \Leftrightarrow x = \cos t$, on prend $|x|<1$.

$y(x) = f(t)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}f \cdot \frac{dt}{dx} = f'(t) \times \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(f'(t) \times \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= x(1-x^2)^{-3/2} f'(t) + f''(t) \times \frac{1}{1-x^2}.$$

on injecte ces expressions dans (1), pour obtenir

$$f''(t) + 4f(t) = 0$$

l'éq caractéristique associée est $r^2+4=0$

$$\Rightarrow f(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$$

$$= A(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2B \sin t \cos t$$

$$= A(2\cos^2 t - 1) + 2B\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\cos t$$

$$\boxed{y_0(x) = A(2x^2-1) + 2Bx\sqrt{1-x^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}.}$$

2°/ Soit l'équation différentielle

$$(1-x^2)\,y''(x) - x\,y'(x) + 4y(x) = \mathrm{Arccos}\,x \quad (2)$$

$|x|<1$

D'après le changement de variables de la question 1°/ (2) devient

$$f''(t) + 4f(t) = t \quad (2')$$

On a déjà déterminer la solution générale de l'équation sans second membre.

~~Une sol.~~ Une solution particulière de (2') sera un polynôme $f_1(t) = \frac{t}{4}$ et une sol. particulière

$$y_1(x) = \frac{\mathrm{Arccos}\,x}{4}$$

La solution générale de (2) est

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$
$$= A(2x^2-1) + 2Bx\sqrt{1-x^2} + \frac{\text{Arccos}\, x}{4}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = -A + \frac{\text{Arccos}\, 0}{4} = \frac{\pi}{8}.$$
$$= -A + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow A = 0.$$

$$y'(x) = A.4x + 2B\left[\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'(0) = 2B - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$y(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\text{Arccos}\, x}{4}$$

3°/ $(1-x^2)y''(x) - x\,y'(x) + k^2 y(x) = 0$

a/ Le changement de variables $t = \text{Arc}\cos x$ effectué dans 1°/ et 2°/ donne

$$f''(t) + k^2 f(t) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt)$$

$$= A\cos(k\,\text{Arc}\cos x) + B\sin(k\,\text{Arc}\cos x).$$

b/ Cherchons un polynôme de degré n sol. de (3) $\boxed{k=3}$

Soit $P_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell \quad a_n \neq 0.$

$P_n'(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell a_\ell x^{\ell-1}$ et $P_n''(x) = \sum_{\ell=2}^{n} \ell(\ell-1) a_\ell x^{\ell-2}$

$P_n(x)$ st solution de (3), alors

$$\sum_{\ell=2}^{n} -\ell(\ell-1) a_\ell x^\ell + \sum_{\ell=1}^{n} -\ell a_\ell x^\ell + \sum_{\ell=0}^{n} k^2 a_\ell x^\ell + \sum_{\ell=0}^{n-2} (\ell+2)(\ell+1) a_{\ell+2} x^\ell = 0 \quad (*)$$

Pour $\ell = n = d° P_n$, on a par identification

$$\left(-n(n-1) - n + k^2\right) a_n = 0 \quad \Rightarrow n = k \; (=3).$$

Pour $\ell = n-1 = 2$, on a

$$\left[-2-2+k^2\right] a_2 = 0 \Leftrightarrow 5a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

pour $\ell = n-2 = 1$.

$$-a_1 + k^2 a_1 + 3.2\,a_3 = 0 \quad \Rightarrow 8a_1 + 6a_3 = 0$$

$$a_1 = -\frac{3}{4} a_3$$

Pour $\ell = 0$ $\quad k^2 a_0 + 2a_2 = 0$, or $a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$.

Donc $\boxed{P_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x}$ st une solution particulière de (3)

c/ Soit $k \in \mathbb{N}$, le polynôme sera de degré k

$P_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell$ 1ère information $n = k$, $a_n \neq 0$ (qu'on peut prendre unitaire) $a_k \neq 0$

pour $\ell = k-1$ $\quad \underbrace{\left[k^2 - (k-1)^2\right]}_{\neq 0} a_{k-1} = 0 \quad \Rightarrow a_{k-1} = 0$

et pour $\ell = k-2, \dots, 0$, on trouve la formule de récurrence suivante.

$(k^2 - l^2)\, a_l + (l+2)(l+1)\, a_{l+2} = 0.$

Ainsi si k est paire, P_n ne contiendra que des puissances paires.

et si k est impaire, P_n ne contiendra que des puissances impaires.

Problème 4 1°/ On a $P(D)y(t) = \exp(\lambda t)\,Q(t)$

On pose $y(t) = Z(t)e^{\lambda t}$ $\quad P(D) = D^2 + aD + b$.

$$D\left[Z(t)e^{\lambda t}\right] = e^{\lambda t}DZ + \lambda e^{\lambda t}Z = e^{\lambda t}[D+\lambda]Z$$

$$D^2\left[Z(t)e^{\lambda t}\right] = e^{\lambda t}D^2 Z + \lambda e^{\lambda t}DZ + \lambda e^{\lambda t}DZ + \lambda^2 e^{\lambda t}Z$$

$$= e^{\lambda t}\left[D^2 + 2\lambda D + \lambda^2\right]Z$$

$$= e^{\lambda t}\left[D+\lambda\right]^2 Z$$

Donc $P(D)\underbrace{\left[Z(t)e^{\lambda t}\right]}_{y(t)} = e^{\lambda t}\left[[D+\lambda]^2 + a[D+\lambda] + b\right]Z$

$$= e^{\lambda t}P(D+\lambda)Z$$

$$\boxed{P(D)\left[Z(t)e^{\lambda t}\right] = e^{\lambda t}P(D+\lambda)Z \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}}$$

2°/ D'après la question 1°/, (1) (cf problème) devient

$$P(D)y(t) = P(D)\left[Z(t)e^{\lambda t}\right] = e^{\lambda t}P(D+\lambda)Z$$

$$= e^{\lambda t}Q(t)$$

Ce qui implique que

$$\boxed{P(D+\lambda)Z = Q(t)}$$

Résultat à admettre : Lorsque λ n'est pas zéro du polynôme $P(x)$ alors $P(D+\lambda)$ est inversible

et on a alors

$$\boxed{Z(t) = \frac{1}{P(D+\lambda)}Q(t)}$$

et à l'aide de la décomposition en fractions rationnelles de $\frac{1}{P(D+\lambda)}$ on en déduit $Z(t)$

3°/ Si λ est racine d'ordre α de P, on peut poser

$$P(x+\lambda) = x^{\alpha} R(x)$$

avec $R(0) \neq 0$. ($\Rightarrow R(x)$ inversible)

$$P(D+\lambda) Z(t) = Q(t)$$

$$R(D) \cdot D^{\alpha} Z(t) = Q(t)$$

$$\Rightarrow \quad D^{\alpha} Z(t) = \frac{1}{R(D)} Q(t)$$

On écrit $\frac{1}{R(D)}$ en fonctions de fractions rationnelles, puis on intègre α fois pour obtenir $Z(t)$ et par suite

$$\boxed{y(t) = e^{\lambda t} Z(t)}$$

Applications

1°/ Eq. diff. $y'' - 3y' + 2y = x^3 e^x \cos x$ (E_1)

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_0(x) = A e^x + B e^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

car l'éq. caractéristique s'écrit

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2).$$

On cherche une solution particulière dans $\mathbb{C}$

de $L'' - 3L' + 2L = x^3 e^{(1+i)x}$ (E_1')

et on prend la partie réelle de cette solution pour avoir une sol. particulière de (E), $y = Re(L)$

(E_1') s'écrit $(D-1)(D-2)L = x^3 e^{(1+i)x}$ (E_1'')

$\lambda = 1+i$ n'est pas racine du polynôme $P(x) = (x-1)(x-2)$

Donc une solution particulière de (E_1'') est donc

$$L(x) = e^{(1+i)x}\left[P(D+1+i)\right]^{-1}(x^3)$$

Or on a $\frac{1}{P(X+1+i)} = \frac{1}{(X+i)(X+i-1)} = \frac{1}{X+i-1} - \frac{1}{X+i}$

Formellement

$$\frac{1}{X+i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-iX} = -i\sum_{p=0}^{+\infty} i^p X^p = -\sum_{p=0}^{+\infty} i^{p+1} X^p$$

$$\frac{1}{X+i-1} = \frac{-1}{1-i-X} = \frac{-1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} - X} = -\frac{1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\times\frac{1}{\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}X\right]}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}X\right)^p$$

$$= -\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{p+1}X^p$$

Toutes les dérivées à partir de l'ordre 4 annule x^3, donc

$$L(x) = \left[-\sum_{p=0}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p+1}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{p+1}D^p(x^3) + \sum_{p=0}^{3} i^{p+1}D^p(x^3)\right]\times e^{(i+1)x}$$

et la solution particulière de (E_1) est alors

$$y_1(x) = Re\left(L(x)\right)$$

- Résolution de l'équation différentielle

$$y'' - 2ay' + a^2y = x^2e^x\cos mx \quad (E_2)\ m, a \in \mathbb{R}^*$$

Les solutions de l'équation homogène sont

$$y_0(x) = (Ax+B)e^{ax}$$

L'éq. caractéristique $r^2 - 2ar + a^2 = (r-a)^2 = 0$ a racine double.

et on obtient une solution particulière de (E_2) en prenant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation différentielle

$$L'' - 2aL' + a^2L = x^2e^{\lambda x} \quad (E_2') \quad \text{avec } \lambda = 1 + im$$

$(E_2') \Rightarrow (D-a)^2L = x^2e^{\lambda x}$ avec $\lambda \neq a$, elle admet

Une solution particulière

$$L(x) = e^{\lambda x} (D+\lambda-a)^2 (x^2)$$

Il suffit de faire développement ~~à l'ordre~~ jusqu'à l'ordre 2 en D de $\frac{1}{(D+\lambda-a)^2}$

$$\frac{1}{(D+\lambda-a)^2} = \frac{1}{(\lambda-a)^2}\left[1+\frac{D}{\lambda-a}\right]^{-2}$$

$$= \frac{1}{(\lambda-a)^2}\left[1-\frac{2D}{\lambda-a}+\frac{3D^2}{(\lambda-a)^2}\right]$$

$$\frac{1}{(D+\lambda-a)^2}(x^2) = \frac{1}{(\lambda-a)^2}\left[x^2-\frac{4x}{\lambda-a}+\frac{6}{(\lambda-a)^2}\right]$$

$$L(x) = e^{\lambda x}\left[\frac{x^2}{(\lambda-a)^2}-\frac{4x}{(\lambda-a)^3}+\frac{6}{(\lambda-a)^2}\right]$$

Une solution particulière de (E_2) est alors

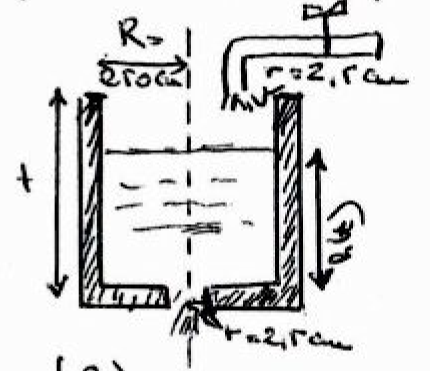
$$y(x) = Re(L(x))$$

Faire les calculs.

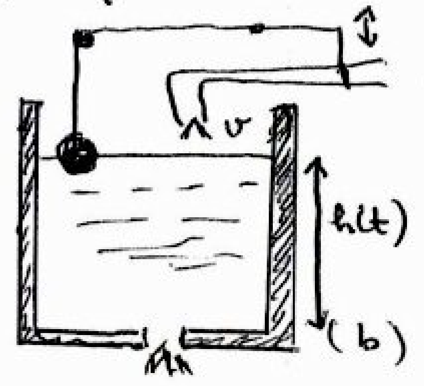
xercice 1 Une certaine quantité d'eau st contenue dans
une citerne de hauteur $H = 600\,cm$ percée d'un trou
d'aire s. La citerne st alimentée par l'eau sortant
à vitesse constante v d'un tuyau de section s (fig a)
e niveau d'eau $h(t)$ dans la citerne est solution de
l'équation suivante

$$(E) \qquad S\frac{dh}{dt} + \beta s\sqrt{h} = s v_1$$

- S désigne la surface de base de la citerne
rayon 250 cm), s la surface de l'orifice (rayon 2,5 cm)
$\beta = 40$ (coefficient de proportionnalité), h en centimètres



(a)



(b)

1°/ Résoudre (E) pour $v = 0$ et déterminer le temps de vidange complète si la citerne st pleine au départ.

2°/ Comment faut-il choisir $v > 0$ pour que l'eau ne déborde pas ? Chercher alors $\lim_{t \to +\infty} h(t)$ si $v = 800\,cm/s$.

3°/ On installe une arrivée régulée (fig (b)) telle que la vitesse dépende de h. soit $v = 4(H-h)$. Chercher $\lim_{t \to \infty} h(t)$.

4°/ On installe une arrivée intermittente de vitesse d'éjection $0\,cm/s$ ou $800\,cm/s$. Elle se déclenche dès que $h \leq \frac{H}{4}$, mais s'arrête si le ~~vitesse~~ niveau h remonte à $\frac{H}{2}$. Calculer le débit journalier de cette arrivée d'eau.



<u>Exercice 2</u> On laisse tomber un corps de masse m, dans un milieu où la résistance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse.

En appliquant la loi fondamentale de la dynamique on montre que

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

avec v compté positivement vers le bas et k constante positive.

1°/ Quelle est la loi de variation de la vitesse de chute v ?

2°/ Si l'on suppose que la vitesse initiale v_0 est positive, quelle est la vitesse limite ?

3°/ Si l'on suppose que la vitesse initiale est égale à zéro, à quel instant le corps atteindra-t-il la vitesse égale à la moitié de la vitesse limite ?

<u>Exercice 3</u> La charge d'un condensateur sans charge initiale, à l'aide d'un générateur de f.é.m E est régie par l'équation

$$(1) \qquad R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

obtenue en appliquant la loi d'Ohm.

<u>Question</u>: Résoudre l'équation différentielle (1).



exercice 1   1°/ $S h' + \beta \Delta \sqrt{h} = 0$ Correction

$$\frac{h'}{\sqrt{h}} = -\frac{\beta \Delta}{S} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\beta \Delta}{S} dt$$

$$\int_{h(0)}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\beta \Delta}{S} t = 2\left[\sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \left(\sqrt{h(0)} - \frac{\beta \Delta}{2S} t\right)^2}$$

Soit T t.q. $h(T) = 0$ et on a $h(0) = H$.

$$\Rightarrow \boxed{T = \sqrt{H}\,\frac{2S}{\beta \Delta}}$$

Application numérique.

$$T = \sqrt{6} \cdot 10 \cdot \frac{2\pi R^2}{40\pi r^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot (100)^2 \text{ secondes}$$

°/ $v > 0$ (E) devient

$$S \frac{dh}{dt} + \beta \Delta \sqrt{h} = \Delta v \Rightarrow \frac{dh}{v - \beta\sqrt{h}} = \frac{\Delta}{S} dt$$

Contraposée : L'eau déborde si à l'instant t_0, $h(t_0) = H$, l'instant juste après t_1, $h(t_1) > H$ alors

$$\int_H^{h(t_1)} \frac{dh}{v - \beta\sqrt{h}} = \frac{\Delta}{S}\underbrace{(t_1 - t_0)}_{>0}$$

$$\int_H^{h(t_1)} \frac{dh}{-v + \beta\sqrt{h}} = -\frac{\Delta}{S}(t_1 - t_0)$$

La fonction $\frac{1}{\beta\sqrt{h} - v}$ étant décroissante (car dérivée négative)

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta\sqrt{h(t_1)} - v} \leq \frac{1}{\beta\sqrt{h} - v} \quad \forall h \in [H, h(t_1)].$$

$$\Rightarrow \frac{h(t_1) - H}{\beta\sqrt{h(t_1)} - v} \leq \int_H^{h(t_1)} \frac{dh}{\beta\sqrt{h} - v} = -\frac{\Delta}{S}(t_1 - t_0)$$

Pour que l'égalité

$$\frac{\overbrace{h(t_1)-H}^{>0}}{\beta\sqrt{h(t_1)}-v} \leq -\frac{\Delta}{S}(t_1-t_0)$$ ait un sens, il faut que

$$\boxed{\beta\sqrt{h(t_1)} < v} \Rightarrow v > \beta\sqrt{h(t_1)} > \beta\sqrt{H}$$

Par Contraposée l'eau ne déborde pas si

$$\boxed{v \leq \beta\sqrt{H}} \Rightarrow \text{La solution existe } \forall t \geq 0.$$

$h_\infty = \lim_{t\to+\infty} h(t)$ sera un point d'équilibre du système

et qui vérifie $\beta\Delta\sqrt{h_\infty} = \Delta v$ $\left(\frac{dh}{dt}=0\right)$

$$\Rightarrow h_\infty = \left(\frac{v}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{800}{40}\right)^2 = 400\text{cm}.$$

$(v \leq \beta\sqrt{H})$

Explication détaillée

Tant que $v < \beta\sqrt{h}$ (resp. $v > \beta\sqrt{h}$) le niveau de l'eau descend (resp. monte) de manière continue et se stabilise quand $v = \beta\sqrt{h(t)}$. À partir de cet instant le débit = alimentation

3°) $v = 4(H-h(t))$. Avec cette vitesse l'eau ne débordera jamais car quand $h(t)=H$, on aura $v=0$. La limite $h_\infty = \lim_{t\to+\infty} h(t)$ vérifie

$$v = 4(H-h_\infty) = \beta\sqrt{h_\infty}$$

La résolution de l'éq. ~~diff.~~ algébrique du second ordre $\Rightarrow h_\infty = \begin{cases} 900\text{cm} \leftarrow \text{dépasse } H \text{ (Donc à éliminer)} \\ \text{ou} \\ 400\text{cm} < H \text{ donc à retenir (point d'équilibre)} \end{cases}$

4°) Le point d'équilibre est atteint en 400 cm.

$$150 = \frac{H}{4} < 300 = \frac{H}{2} < 400 = h_\infty$$



Soit H_0 la hauteur initiale de la citerne

1°/ 1er cas : La condition initiale de la citerne

$H_0 \leq \frac{H}{4}$

$$H_0 \xrightarrow[t_1]{} \frac{H}{4} \underset{t_3}{\overset{t_2}{\rightleftarrows}} \frac{H}{2}$$

Alors $24^h = t_1 + n(t_2 + t_3) + \{\beta t_2 \text{ ou } \beta t_3\}$

Dans ce cas le débit journalier et $0 < \beta < 1$

$$\Delta v\,(t_1 + n t_2 \text{ ou } t_1 + n t_2 + \beta t_2)$$

2ème cas $\quad \frac{H}{4} \leq H_0 < \frac{H}{2} \quad v = 0$

$$\frac{H}{4} \xleftarrow{t_1} H_0 \longrightarrow \frac{H}{2}, \quad \xrightarrow{t_2}, \quad \xleftarrow{t_3}$$

$24^h = t_1 + n(t_2 + t_3) + \beta t_2 \text{ ou } \beta t_3$

Le débit journalier de l'arrivée de l'eau est

$$\Delta v\,(n t_2 \text{ ou } (n+\beta) t_2)$$

3ème cas $\quad \frac{H}{4} \xleftarrow{t_1} H_0, \quad \frac{H}{4} \underset{t_3}{\overset{t_2}{\rightleftarrows}} \frac{H}{2}$

$24^h = t_1 + n(t_2 + t_3) + \beta t_2 \text{ ou } \beta t_3 \qquad 0 < \beta < 1.$

Le débit journalier de l'arrivée de l'eau est

$$\Delta v\,(n t_2 \text{ ou } (n+\beta) t_2)$$

Exercice 2

1°/ $m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$

$$\frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m} t$$

On pose $a = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, on a $\frac{1}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a}\right)$



Après intégration, on a

$$\frac{1}{2a}\left[\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right|\right]_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| = -\frac{2ak}{m}t + C$$

$$\frac{v-a}{v+a} = Ke^{-\frac{2ak}{m}t} \Rightarrow v(t) = a\left[\frac{1+Ke^{-\frac{2ak}{m}t}}{1-Ke^{-\frac{2ak}{m}t}}\right] \quad t \geq 0$$

$$v(t) = a\left[\frac{1+Ke^{-2bt}}{1-Ke^{-2bt}}\right] \quad t \geq 0$$

$$b = \frac{ak}{m} = \sqrt{\frac{kg}{m}}$$

2°| $v(0) = a\left[\frac{1+K}{1-K}\right] \geq 0$

$$v_\infty = v_\ell = \lim_{t\to+\infty} v(t) = a = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \text{point d'équilibre}$$

Si $v_0 = a$, alors $K = 0 \Rightarrow v(t) = a$

Si $0 \leq v_0 < a \Rightarrow \frac{1+K}{1-K} < 1$

$\Rightarrow K \in [-1, 0[$

$$v(t) = a\left[\frac{1-\alpha e^{-2bt}}{1+\alpha e^{-2bt}}\right] \quad \alpha \in]0,1]$$

Si $v_0 > a$ $\quad K \in]0,1[\quad \frac{1+K}{1-K} > 1$.

$$v(t) = a\left[\frac{1+Ke^{-2bt}}{1-Ke^{-2bt}}\right] \downarrow a$$

<u>Question Curiosité</u> : Que se passe-t-il si

$v_0 < 0 \Leftrightarrow \frac{1+K}{1-K} < 0 \Leftrightarrow K \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

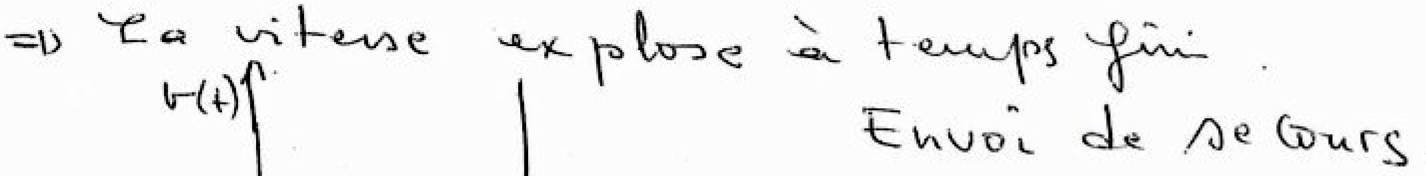
Si $K \in]-\infty, -1[\Rightarrow \frac{1+K}{1-K} > -1$

La vitesse $\quad v(0) = v_0 = a\left[\frac{1+K}{1-K}\right] > -a$

s'annule en temps fini

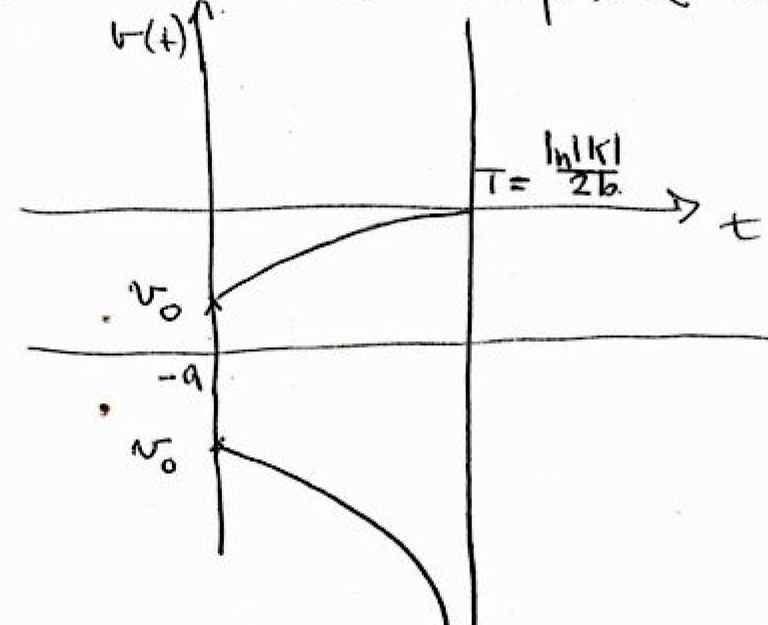
$v(t) = a\left[\frac{1+Ke^{-2bt}}{1-Ke^{-2bt}}\right]$. Il existe un temps $T > 0$ t.q. $1 + Ke^{-2bT} = 0$.

si $K \in]1, +\infty[$ alors $\frac{1+K}{1-K} < -1$, Alors ($v_0 < -a$) il existe $T > 0$ fini t.q. $1 - Ke^{-2bT} = 0$



$\Rightarrow$ La vitesse explose à temps fini

Envoi de secours



$$v(0) = \underset{v_0}{0} = a\left[\frac{1+K}{1-K}\right] \Rightarrow K = -1$$

$$v(t) = a\left[\frac{1 - e^{-2bt}}{1 + e^{-2bt}}\right]$$

$$v(T) = a\left[\frac{1 - e^{-2bT}}{1 + e^{-2bT}}\right] = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 2\left(1 - e^{-2bT}\right) = 1 + e^{-2bT}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = \frac{\ln 3}{2b} = \frac{\ln 3}{2}\sqrt{\frac{m}{kg}}}$$